Matematyka realistyczna

Z podstawy programowej wynika, że nauczanie matematyki powinno być organizowane w taki sposób, by uczniowie koncentrowali się na odniesieniach do znanej sobie rzeczywistości, a stosowane pojęcia i metody powinny być powiązane z obiektami występującymi w znanym środowisku. Podpowiadamy, jak to zrobić.

Joanna Świercz

Liczby osadzone w kontekście praktycznym i bliskim uczniom robią znacznie większe wrażenie niż samo rozwiązanie zadania. Przeanalizujmy to na poniższym przykładzie:

Rzeka Amazonka wlewa do Oceanu Atlantyckiego 120 000 m^3 wody w ciągu sekundy.

1. Jakie wymiary powinien mieć prostopadłościenny basen o głębokości 3 m z dnem w kształcie kwadratu, aby pomieścić taką ilość wody?
2. W basenie olimpijskim mieści się 2 300 000 litrów wody. Ile takich basenów mogłaby napełnić w ciągu sekundy rzeka Amazonka? (*Matematyka 7 z plusem*)

Czy to „mega dużo"?

Po rozwiązaniu tego zadania okazuje się, że dno basenu musi być kwadratem o boku 200 m, a Amazonka w ciągu sekundy napełni 52 baseny olimpijskie. Zadanie to jest bardzo ciekawe, uczniowie po jego rozwiązaniu najczęściej mówią: „dużo, wielki basen". Moim zdaniem jednak nie mają świadomości, że jest to, używając ich słów, „mega dużo". Dlaczego tak się dzieje? Nikt z nich nie widział rzeki Amazonki, baseny olimpijskie są tylko w 12 miastach w Polsce. Dlatego zachęcam ich do zrobienia kolejnego kroku, przybliżenia tych wielkości za pomocą innych, znanych z życia codziennego. Zaczynamy wspólnie zastanawiać się, czy widzieliśmy np. jakąś budowlę, która ma 200 m wysokości. Nawet gdy nie posiadamy takiej wiedzy, to mając dostęp do internetu, sprawdzamy nasze przypuszczenia albo po prostu szukamy odpowiedzi.

Przykładem takiej budowli, którą uczniowie widzieli na własne oczy, jest Pałac Kultury i Nauki w Warszawie. Należy uczniom przypomnieć, że basen ma być kwadratem o boku takiej długości, jaką wysokość ma PKiN. Rozwiązując to zadanie, może nam umknąć jedna ważna informacja, a mianowicie czas. Rzeka Amazonka wlewa tę ilość wody w ciągu zaledwie 1 sekundy. Można spróbować przeliczyć, ile czasu zajęłoby przelanie takiej ilości wody za pomocą np. 10-litrowego wiadra jednej osobie lub 30-osobowej klasie. Otrzymujemy następujące wyniki:

- 120 000 m^3 = 120 000 000 litrów
- 120 000 000 litrów : 10 litrów = 12 000 000 wiader

Można przeprowadzić eksperyment i zmierzyć czas napełnienia wiadra, przeniesienia go w inne miejsce i wylania z niego wody. Gdybyśmy przyjęli, że będzie to np. 10 sekund, to jedna osoba będzie potrzebowała na to:

- 12 000 000 wiader x 10 sekund = 120 000 000 sekund na 1 osobę
- 120 000 000 sekund = 2 mln minut ≈ 33 333 godziny ≈ 1338 dób ≈ 46 miesięcy ≈ 4 lata

Klasa 30-osobowa będzie potrzebowała na tę czynność:

- 12 000 000 wiader x 10 sekund : 30 osób = 4 mln sekund na klasę
- 4 000 000 sekund = 66 667 minut ≈ 1 111 godzin ≈ 46 dób ≈ 1,5 miesięcy

Ile waży szarańcza?

Kolejne zadanie z podręcznika *Matematyka 7 z plusem* także wymaga odniesienia do rzeczywistości znanej uczniom:

Jedna z największych chmar szarańczy pojawiła się w Kenii w 1954 r. i liczyła 10 mld owadów. Jeden osobnik szarańczy waży około 2,5 g. Zapisz w notacji wykładniczej, ile ton ważyła ta chmara szarańczy.

Po wykonaniu odpowiednich obliczeń dowiadujemy się, że szarańcza ważyła $2,5 \times 10^4$ t. Po raz kolejny uczniowie zauważą, że to jest dużo. Warto ich jednak zachęcić do wyobrażenia sobie, jak dużo. Wspólnie z uczniami przeliczyliśmy, ile byłoby to słoni afrykańskich. Sprawdzamy w Wikipedii średnią wagę dorosłego osobnika płci męskiej. Jest to 6 ton, czyli 25 000 : 6 ≈ 4167 słoni.

Dzieci widziały słonia, ale czy widziały stado złożone z 4167 słoni? Takie zjawiska nie występują w przyrodzie. Więc może warto przeliczyć, wybierając inną jednostkę. Proponuję wybrać łączną wagę wszystkich uczniów w klasie. Zadania z notacji wykładniczej pojawiają się w klasie VII, VIII szkoły podstawowej, wówczas klasa złożona z 25 uczniów może ważyć 1500 kg.
25 000 : 1,5 = 16 667 klas

Wartość reklamy

Ofertę reklamową stacji telewizyjnych wykorzystuję podczas doskonalenia umiejętności wykonywania działań na ułamkach dziesiętnych sposobem pisemnym. Cennik reklamowy każdej ze stacji bez problemu można znaleźć w internecie. Wystarczy wpisać w pole wyszukiwania „cennik reklamowy" i wybrać nazwę stacji telewizyjnej. Ja najczęściej wybieram TVN. Oto fragment cennika z maja 2018 r. Podane ceny dotyczą reklam trwających 30 sekund

1.05.2018	19.24	(przed) *Sport*	41 200 zł
	19.29	(przed) *Fakty**	49 000 zł
	19.33	(przed) *Pogoda*	39 300 zł
	19.44	(przed) *Uwaga!*	37 300 zł
	20.30	(w) *Na Wspólnej* 16/1	45 400 zł
	20.34	(w) *Na Wspólnej* 16/2	45 400 zł
	20.47	(przed) *Milionerzy*	30 700 zł
	21.05	(w) *Milionerzy* /1	40 800 zł
	21.26	(przed) *Diagnoza* 2	47 500 zł
	21.40	(w) *Diagnoza* 2/1	49 200 zł
	22.05	(w) *Diagnoza* 2/2	50 900 zł
	22.26	(przed) *Kuba Wojewódzki* 12	35 500 zł

Najpierw należy poprosić uczniów, aby ceny zostały przeliczone z użyciem ułamków dziesiętnych, czyli wyrażone w tysiącach złotych.

1.05.2018	19.24	(przed) *Sport*	41,2 tys. zł
	19.29	(przed) *Fakty**	49 tys. zł
	19.33	(przed) *Pogoda*	39,3 tys. zł
	19.44	(przed) *Uwaga!*	37,3 tys. zł
	20.30	(w) *Na Wspólnej* 16/1	45,4 tys. zł
	20.34	(w) *Na Wspólnej* 16/2	45,4 tys. zł
1.05.2018	20.47	(przed) *Milionerzy*	30,7 tys. zł
	21.05	(w) *Milionerzy* /1	40,8 tys. zł
	21.26	(przed) *Diagnoza* 2	47,5 tys. zł
	21.40	(w) *Diagnoza* 2/1	49,2 tys. zł
	22.05	(w) *Diagnoza* 2/2	50,9 tys. zł
	22.26	(przed) *Kuba Wojewódzki* 12	35,5 tys. zł

Reklama jednego z towarzystw ubezpieczeniowych, w której dziecko w kasku zjeżdża ze schodów, siedząc w misce, jest lubiana przez dzieci. Można ją odtworzyć w klasie. Trwa ona dokładnie 30 sekund, czyli idealnie, bez konieczności przeliczeń, pasuje do naszego cennika. Do tego materiału ćwiczeniowego można zastosować następujące pytania:

1. O której godzinie emisja reklamy jest najdroższa? Czy potrafisz powiedzieć, dlaczego właśnie o tej godzinie?
2. Czy droższa jest emisja reklamy przed *Milionerami*, czy w pierwszej przerwie reklamowej serialu *Diagnoza*?
3. O ile droższa jest emisja reklamy przed serialem *Na Wspólnej* niż przed programem *Kuba Wojewódzki*?
4. *Sport* zaczyna się o godzinie 19.30. Jak długi będzie blok reklamowy przed tym programem?
5. Ile łącznie zarobi stacja telewizyjna na emisji reklam przed *Sportem*?
6. Ile łącznie trzeba by zapłacić za emisję reklamy ubezpieczenia, gdybyśmy chcieli ją emitować jednokrotnie w każdym z bloków reklamowych pomiędzy godzinami 19.40 a 22.15?
7. Sprawdźcie w internecie, ile wynosi obecnie minimalna, a ile średnia płaca w Polsce. Przeliczcie, ile miesięcy należy pracować, aby uzbierać środki na emisję reklam wspomnianych w pkt 6.

Obliczenia te, szczególnie dotyczące ostatniego punktu, robią na dzieciach duże wrażenie. Na takim materiale liczbowym bez większych problemów można konstruować kolejne pytania, do czego zachęcam.

Biblia na matematyce?

Na lekcjach matematyki można wykorzystać również fragment ewangelii św. Mateusza – (Mt 20, 1–16). Dla matematyka jest on interesujący m.in. ze względu na obliczenia zegarowe. Przytoczę fragment:

„**1** Albowiem królestwo niebieskie podobne jest do gospodarza, który wyszedł wczesnym rankiem, aby nająć robotników do swej winnicy. **2** Umówił się z robotnikami o denara za dzień i posłał ich do winnicy. **3** Gdy wyszedł około godziny trzeciej, zobaczył innych, stojących na rynku bezczynnie, **4** i rzekł do nich: „Idźcie i wy do mojej winnicy, a co będzie słuszne, dam wam". **5** Oni poszli. Wyszedłszy ponownie około godziny szóstej i dziewiątej, tak samo uczynił. **6** Gdy wyszedł około godziny jedenastej, spotkał innych stojących i zapytał ich: „Czemu tu stoicie cały dzień bezczynnie?” **7** Odpowiedzieli mu: „Bo nas nikt nie najął”. Rzekł im: „Idźcie i wy do winnicy!” **8** A gdy nadszedł wieczór, rzekł właściciel winnicy do swego rządcy: „Zwołaj robotników i wypłać im należność, począwszy od ostatnich aż do pierwszych!” **9** Przyszli najęci około jedenastej godziny i otrzymali po denarze. **10** Gdy więc przyszli pierwsi, myśleli, że więcej dostaną; lecz i oni otrzymali po denarze. **11** Wziąwszy go, szemrali przeciw gospodarzowi, **12** mówiąc: „Ci ostatni jedną godzinę pracowali, a zrównałeś ich z nami, którzyśmy znosili ciężar dnia i spiekoty”. **13** Na to odrzekł jednemu z nich: „Przyjacielu, nie czynię ci krzywdy; czy nie o denara umówiłeś się ze mną? **14** Weź, co twoje i odejdź! Chcę też i temu ostatniemu dać tak samo jak tobie. **15** Czy mi nie wolno uczynić ze swoim, co chcę? Czy na to złym okiem patrzysz, że ja jestem dobry?” **16** Tak ostatni będą pierwszymi, a pierwsi ostatnimi”.

Wspomniane godziny pracy są niejasne. Gospodarz wychodzi najpierw o świcie, po raz drugi o 3.00 nad ranem, potem o 6.00, 9.00 i o 11.00. Grupy robotników pracują aż do wieczora. Pojawia się pytanie, o której jest świt, a o której wieczór, jak długo pracują robotnicy. Aby przeliczyć godziny pracy, musimy sięgnąć do innego przekładu:

„**1** Królestwo Niebios przypomina bowiem pewnego gospodarza, który wyszedł wczesnym rankiem wynająć robotników do swojej winnicy. **2** Uzgodnił z nimi stawkę – denar za dzień – i posłał do pracy. **3** Następnie wyszedł o dziewiątej i zobaczył innych, stojących bezczynnie na rynku. **4** Idźcie i wy do winnicy – powiedział – a ja wam sprawiedliwie zapłacę. **5** I oni poszli. Potem wyszedł jeszcze w południe i około piętnastej. Postąpił podobnie”.

W Palestynie za dzień uważano czas od wschodu do zachodu słońca, tj. 12 godzin. Długość godzin zależała jednak od pory roku – w lecie były one dłuższe, a w zimie krótsze. Możemy się domyślać, że w przypowieści chodzi o porę zbiorów, ponieważ gospodarz wychodzi na plac aż czterokrotnie. Robotnicy posyłani są do winnicy kolejno w godzinie trzeciej (ok. 9.00), szóstej (12.00), dziewiątej (15.00) oraz, nieoczekiwanie, jedenastej (17.00), a więc godzinę przed zakończeniem czasu pracy. Warto wspomnieć, że pan najmuje ich średnio co trzy godziny, co odpowiada ówczesnemu podziałowi dnia na cztery okresy.

Z tekstu dowiadujemy się również, że ostatnia grupa pracuje tylko godzinę. Po przeczytaniu tych fragmentów można poprosić uczniów o wykonanie obliczeń i wypełnienie poniższej tabelki:

Nr grupy	Godzina rozpoczęcia pracy	Godzina zakończenia pracy	Czas pracy [h]
I			
II			
III			
IV			
V			

Nr grupy	Godzina rozpoczęcia pracy	Godzina zakończenia pracy	Czas pracy [h]
I	6	18	12
II	9	18	9
III	12	18	6
IV	15	18	3
V	17	18	1

Kolejnym krokiem jest spojrzenie na czas pracy i zarobek robotników okiem gospodarza. W tym celu pomocna będzie kolejna tabelka:

Nr grupy	Czas pracy [h]	Brakujący czas do pełnego dnia pracy [h]	Zapłata za 1 godz. pracy	Zapłata sprawiedliwa według robotników z grupy nr I	Rzeczywista zapłata
I	12	0	$\frac{1}{12}$ *denara*	1 denar	1 denar
II	9	3	$\frac{1}{9}$ *denara*	$9x\frac{1}{12}$ *denara* $= \frac{9}{12}$ *denara*	1 denar
III	6	6	$\frac{1}{6}$ *denara*	$6x\frac{1}{12}$ *denara* $= \frac{6}{12}$ *denara*	1 denar
IV	3	9	$\frac{1}{3}$ *denara*	$3x\frac{1}{12}$ *denara* $= \frac{3}{12}$ *denara*	1 denar
V	1	11	1 *denar*	$1x\frac{1}{12}$ *denara* $= \frac{1}{12}$ *denara*	1 denar

Według pierwszej grupy – robotników na stałe zatrudnionych w winnicy – zapłata ta jest niesprawiedliwa. Należy więc zadać pytanie, o ile więcej, zdaniem pierwszej grupy robotników, zapłacił Gospodarz grupom II–V. Są to odpowiednio $\frac{3}{12}, \frac{6}{12}, \frac{9}{12}$ i $\frac{11}{12}$ denara. Daje to razem $\frac{29}{12}=2\frac{5}{12}$ denara za dużo. Grupy II–V powinny łącznie przepracować o 29 godzin więcej w winnicy za zapłatę, którą otrzymały.

Co ten przykład pokazuje? Gdyby analizować go na lekcji religii, wyraźnie byłoby widać, że arytmetyka ludzka nie jest arytmetyką boską i ciężko zrozumieć jej zasady. Na lekcjach matematyki można pokazać, że matematyka jest wszędzie.

Zapis z podstawy programowej z matematyki przytaczany przeze mnie na początku artykułu można również zastosować, wprowadzając nowe pojęcia matematyczne. Wówczas odniesienia do znanej uczniom rzeczywistości czy powiązanie pojęć z obiektami występującymi w środowisku uczniów znacząco ułatwia zrozumienie nowych treści i zagadnień. Zyskujemy ponadto powiązanie, które w pamięci uczniów utrwali się szybciej niż matematyczna nazwa.

Indianie i rycerze

Na swoich lekcjach staram się jak najczęściej, o ile jest to tylko możliwe, wiązać pojęcia matematyczne z różnymi pojęciami dnia codziennego czy światem literatury i historii. W większości powiązania te dla osoby patrzącej z boku, nieuczestniczącej w procesie edukacyjnym, są całkowitą abstrakcją. I tak dodawanie i odejmowanie liczb całkowitych zamieniam na potyczki rycerskie, a porównywanie ułamków zwykłych na przyjęcia indiańskie.

Tłumaczenie dodawania i odejmowania liczb całkowitych z użyciem pojęcia długu w czasach wszechobecnych debetów jest nieskuteczne, podobnie jak zastosowanie temperatur ujemnych. Wprowadzając te tematy, korzystam z faktu, że kolejne pokolenia dzieci fascynują się rycerzami, żołnierzami, pojedynkami, bitwami. Rycerze średniowieczni są czasami wypierani przez rycerzy Jedi. Niezmienny pozostaje fakt, że stają naprzeciwko siebie dwie wrogie siły, bohaterowie pozytywni (liczby dodatnie) i „czarne charaktery" (liczby ujemne), zdolne m.in. do zdrad i przechodzenia na stronę dodatnią. Wprowadzając dodawanie i odejmowanie, będziemy więc mieć do czynienia z trzema sytuacjami:

1. Pojedynek.
2. Gromadzenie wojsk.
3. Zdrada.

Przed przejściem do wykonywania konkretnych obliczeń ćwiczę z uczniami rozpoznawanie możliwych sytuacji, które mogą napotkać. Wypisuję kilka przykładów i proszę, aby zidentyfikowali sytuację, z którą mają do czynienia.

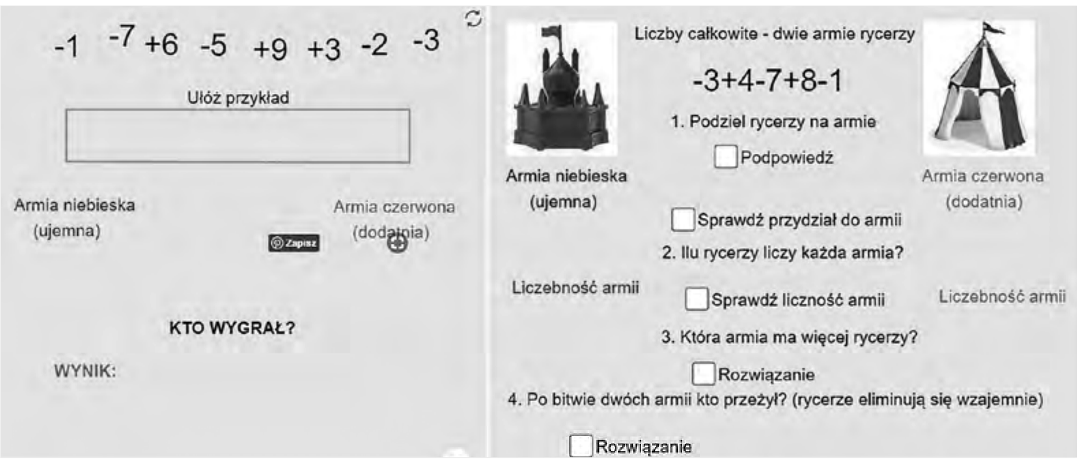
–2 + 4	pojedynek/starcie
–2 – 4	gromadzenie wojsk ujemnych
–2 + (–4)	gromadzenie wojsk ujemnych
4 + 2	gromadzenie wojsk dodatnich
2 – 4	pojedynek/starcie

Podczas kolejnych lekcji pojawia się trzecia sytuacja:

–2 – (–4)	zdrada – na stronę dodatnią przechodzi –4, –2 + 4; potem następuje pojedynek/starcie
4 – (–2)	zdrada – na stronę dodatnią przechodzi –2, 4 + 2; potem następuje gromadzenie wojsk dodatnich

Uczniowie bardzo szybko zaczynają rozróżniać poszczególne sytuacje. W przypadku pojedynku/starcia sprawdzają, która z armii jest liczniejsza i naturalnie uznają ją za wygraną. Jako wynik podajemy liczbę rycerzy, która po starciu pozostanie bez uszczerbku na zdrowiu. W przypadku gromadzenia wojsk zauważają, że nie ma konieczności pojedynku, ponieważ spotykają się rycerze z tego samego obozu i jest ich automatycznie więcej – tutaj następuje dodawanie i zapisanie wyniku z odpowiednim znakiem. Gdy następuje zdrada, przejście ujemnych na stronę dodatnią powoduje, że mamy znowu do czynienia tylko z dwiema sytuacjami – pojedynkiem/starciem lub gromadzeniem wojsk.

Lepiej zrozumieć ten temat pomaga przygotowany przeze mnie w programie Geogebra interaktywny aplet dostępny pod adresem: https://www.geogebra.org/m/bW97GetS: Kolejnym pojęciem, które staram się tłumaczyć na konkretnych przykładach, jest porównywanie ułamków zwykłych.



Wyobraźmy sobie, że urządzamy indiańskie przyjęcia, na których podajemy jako główne danie jednego indyka. Przyjęcia odbywają się dzień po dniu. Na pierwszym obecnych było czterech Indian, na drugim trzech. Całego indyka rozdzielamy równo najpierw pomiędzy czterech gości, a w kolejny dzień pomiędzy trzech. Kluczowym punktem jest zadanie uczniom pytania: „Podczas którego przyjęcia goście najedzą się bardziej?". Dzieci bez problemu odpowiedzą, że ci w drugim dniu, bo było ich mniej, więc kawałki były większe. Myślenie dzieci wspieram obrazem.

Następnie formalizujemy zapis za pomocą ułamków zwykłych. Otrzymujemy odpowiednio ułamki $\frac{1}{4}$ i $\frac{1}{3}$, czyli odpowiednio jeden indyk podzielony pomiędzy czterech Indian oraz jeden indyk podzielony pomiędzy trzech Indian. Pozostaje jedynie wstawić znak mniejszości lub większości.

$$\frac{1}{4} < \frac{1}{3}$$

Omówiony powyżej przykład dotyczy porównywania ułamków o tych samych licznikach. Podobnie jest z ułamkami o tych samych mianownikach. Odbywają się wtedy dwa przyjęcia z taką samą liczbą gości i różną liczbą indyków.

Podczas pierwszego przyjęcia podajemy trzem gościom dwa indyki, podczas drugiego przyjęcia tej samej liczbie gości serwujemy jednego indyka. Podobnie jak w poprzednim przykładzie, prosimy dzieci, aby zastanowiły się, na którym przyjęciu goście najedzą się bardziej, Dzieci bez większego problemu wybiorą przyjęcie organizowane jako pierwsze, a uzasadnieniem będzie większa ilość jedzenia, co przekłada się na większe kawałki. Kolejny krok to zapis z użyciem ułamków zwykłych i znaków „<" lub „>".

$$\frac{2}{3} > \frac{1}{3}$$

Dlaczego warto?

Wprowadzanie realizmu na lekcjach matematyki ułatwia jej zrozumienie. Nauczyciel zyskuje skojarzenia, które pojawiają się w głowie ucznia. Może on nie pamiętać, jak porównywać ułamki zwykłe, ale po jednym słowie nauczyciela, np. Indianie, od razu przypomina sobie, co ma zrobić, aby rozwiązać zadanie. Realizm powoduje również, że matematyka jest bliższa uczniom. Zauważają oni, że jest ona wszechobecna, jest uniwersalnym językiem, za pomocą którego można próbować opisywać otaczający ich świat.

Bibliografia:

- *Matematyka 7 z plusem,* red. M. Dobrowolska, Gdańsk 2017.
- J. Świercz, *Matma inaczej, czyli pomysły na przełamanie rutyny lekcyjnej,* Opole 2017.
- http://www.orygenes.pl/przypowiesc-o-robotnikach-w-winnicy-mt-20-1-16/

Joanna Świercz
Nauczyciel matematyki w SP nr 31 w Opolu, konsultant Miejskiego Ośrodka Doskonalenia Nauczycieli w Opolu. Członek Prezydium Zarządu Stowarzyszenia Nauczycieli Matematyki oraz grupy „Superbelfrzy". Trener programu #SuperKoderzy Fundacji Orange. Autorka książek na temat wykorzystania metod aktywizujących na lekcjach matematyki oraz bloga www.matmainaczej.pl

W materiale wykorzystano rysunki autorki artykułu.